# Prebrojivi skupovi

*Petar Gregorek*[1], *Mladen Vuković*[2]

Realni se brojevi dijele na racionalne i iracionalne. Racionalni realni brojevi su realni brojevi koji se mogu prikazati u obliku $\frac{m}{n}$, gdje je $n$ prirodan dok je $m$ cijeli broj. Iracionalni realni brojevi su realni brojevi koji se ne mogu prikazati u tom obliku. Jedan od "najstarijih" iracionalnih brojeva je svakako $\sqrt{2}$, duljina dijagonale kvadrata stranice 1. Jedan od "najpopularnijih" iracionalnih brojeva je svakako $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, omjer 'zlatnog reza'.

Osim podjele realnih brojeva na racionalne i iracionalne, razmatra se podjela i na algebarske i transcendente brojeve. Algebarski brojevi su rješenja algebarskih jednadžbi (kasnije ćemo još detaljnije objasniti što su algebarski brojevi). Primjerice, svaki racionalni broj $\frac{m}{n}$ je *algebarski* jer je rješenje algebarske jednadžbe $nx - m = 0$. Iracionalan broj $\sqrt{2}$ je *algebarski* broj jer je rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 - 2 = 0$. Iracionalan broj $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ je *algebarski* broj jer je rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 - x - 1 = 0$. Postoje li iracionalni realni brojevi koji nisu algebarski? Postoje, ali to nije lako dokazati. Realni brojevi koji nisu algebarski nazivaju se *transcendentni* realni brojevi. Postavlja se i pitanje koliko ih ima. Jesu li transcendentni brojevi neke posebne iznimke? Ima li ih možda beskonačno mnogo? Ima li ih "više" od algebarskih? Na ta pitanja ćemo odgovoriti u naša dva članka.

Švicarski matematičar J. H. Lambert je 1761. godine dokazao da su realni brojevi $\pi$ i $e$ iracionalni brojevi. Na dokaz da su oni transcendentni moralo se pričekati još neko vrijeme. Francuski matematičar J. Liouville je 1844. prvi dokazao da su neki realni brojevi, koje je on "konstruirao" isključivo u tu svrhu, transcendentni. Njemu u čast ti se brojevi nazivaju *Liouvilleovi brojevi*. Možda je najpoznatiji od njih sljedeći:

$$0.110001000000000000000001 0\ldots$$

ili preglednije zapisano

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \cdots.$$

Francuski matematičar Charles Hermite je 1873. godine uspio dokazati da je broj $e$ transcendentan. Je li broj $\pi$ transcendentan? Ako ćete pažljivo pročitati oba naša članka, saznat ćete odgovor i na to pitanje.

[1] Autor je predavač na Fakultetu strojarstva i brodogranje u Zagrebu; e-pošta: petar.gregorek@fsb.hr

[2] Autor je izvanredni profesor na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu; e-pošta: vukovic@math.hr

Njemački matematičar G. Cantor je 1870-tih razmatrajući probleme vezane uz zasnivanje ili "prirodu" *linearnog kontinuuma*, tj. brojevnog pravca, došao na ideju o prebrajanju, "nizanju", elemenata beskonačnih skupova brojeva. Pokazao je da je skup $\mathbb{Q}$ svih racionalnih brojeva prebrojiv, tj. ima ih isto kao i svih prirodnih brojeva. Zatim je pokazao da je i skup svih realnih algebarskih brojeva prebrojiv. No, tada je slijedilo veliko iznenađenje. Cantor je dokazao da skup $\mathbb{R}$ nije prebrojiv (kažemo još da je skup $\mathbb{R}$ neprebrojiv). Ovaj rezultat je objavljen 1874. godine. Na taj je način Cantor "indirektno" pokazao da i transcendentnih realnih brojeva ima neprebrojivo mnogo.

U prvom se koraku dokaza neprebrojivosti skupa svih transcendentnih realnih brojeva mora dokazati prebrojivost skupa svih algebarskih brojeva. Jedan način kako da to učinimo vodi preko dokaza da je skup svih polinoma s cjelobrojnim koeficijentima prebrojiv. Ovaj postupak u znatnoj mjeri koristi tehnike iz teorije skupova i skicira se u kolegiju *Teorija skupova*. Drugi od autora ovog članka predaje ovaj kolegij više od desetak godina na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu. Trenutno je to obavezan kolegij na trećoj godini zimskog semestra preddiplomskog studija Matematike.

Godine 2014. objavljen je članak [2] naslova *Direktan dokaz neprebrojivosti transcendentnih realnih brojeva* koji zauzima točno jednu stranicu teksta! U ovom se dokazu "zaobilazi" rezultat o prebrojivosti algebarskih brojeva. Taj je članak bio poticaj autorima da čitatelje MFL-a upoznaju s oba pristupa dokazu navedenog rezultata.

Oba smo dokaza kao i za njih potrebne pojmove i tehnike pokušali izložiti tako da se sadržaj čita (i proradi!) kao jedna cjelina, bez čestog pozivanja na popis literature. Sadržaj je podijeljen u dva članka. Iza svakog dijela nalazi se desetak zadataka za vježbu. Zadatci se mogu grubo podijeliti na zadatke za provjeru usvojenih pojmova, te na one u kojima su iskazani neki važni rezultati koje koristimo.

Prvi članak je u najvećoj mjeri posvećen uvođenju i objašnjenju pojmova i tehnika koje koristimo, te je podijeljen na dva dijela koji imaju naslove: *Funkcije* i *Prebrojivi skupovi*. U prvom koji ima naslov *Funkcije* navodimo osnovne vrste funkcija kao što su, primjerice, injekcija, surjekcija i bijekcija, te dajemo primjere za svaki navedeni pojam. U drugom dijelu koji ima naslov *Prebrojivi skupovi* razmatramo beskonačne skupove brojeva kao i njihove *Kartezijeve produkte* za koje postoji bijekcija na skup $\mathbb{N}$. Tu je i dokaz da je za svaki prirodan broj $n$ skup $\mathbb{Z}^n$ prebrojiv. Ovaj skup ima važnu ulogu u opisu skupa svih polinoma s cjelobrojnim koeficijentima.

Drugi sadrži dijelove pod sljedećim naslovima: *Polinomi*, *Neprebrojivi skupovi* i *Dokazi neprebrojivosti skupa transcendentnih brojeva*. Sadržaje pojedinih dijelova drugog članka detaljnije ćemo u njemu opisati. Želimo posebno naglasiti da članci nisu namijenjeni samo za čitanje, već preporučamo da se uzme papir i olovka, te se redom raspisuju primjeri i dokazi tvrdnji.

Nadamo se da ćemo ovim člancima čitatelje zainteresirati za teoriju algebarskih i transcendentnih brojeva u kojoj su još mnoga pitanja otvorena. Više o njima reći ćemo na kraju drugog članka.

Skup svih prirodnih brojeva zadaje se navođenjem nekoliko njegovih prvih elemenata $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Skup svih cijelih brojeva također se zadaje navođenjem nekoliko njegovih elemenata $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Skup svih racionalnih brojeva obično se zadaje ovako $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Svaki racionalan broj u decimalnom zapisu ima samo konačno mnogo decimala različitih od nule ili se pak radi o periodičkom decimalnom broju. Skup svih realnih brojeva intuitivno se može opisati kao nadskup skupa $\mathbb{Q}$ koji sadrži i sve neperiodičke decimalne brojeve. Realni brojevi koji nisu racionalni nazivaju se iracionalni brojevi. Primjerice, realan broj $\sqrt{2}$ nije racionalan (znate li to dokazati?).

## Funkcije

Pojam funkcije je svakako jedan od najvažnijih pojmova matematike. Iako je glavni cilj ovog članka vezan uz brojeve, one ipak imaju ključnu ulogu.

Važno je naglasiti da se na svim fakultetima, koji imaju kolegije matematičkih sadržaja u svom programu, prvo proučavaju funkcije, a onda se predaju sljedeći naslovi vezani uz funkcije: limes, neprekidnost, derivacija i integral.

Cilj nam je u ovom dijelu članka uvesti neke pojmove u vezi funkcija, te navesti neke primjere. Ovdje ne možemo dati strogu matematičku definiciju funkcije, već ćemo samo opisati pojam funkcije[3]. Da bismo zadali neku funkciju moramo zadati njenu domenu i kodomenu, te pravilo pridruživanja. Domena i kodomena su proizvoljni neprazni skupovi. Obično se govori da funkcija elementima domene pridružuje elemente kodomene. Svako pridruživanje nije funkcija. Da bi ono bilo funkcija, pravilo pridruživanja mora zadovoljavati sljedeći uvjet: svakom elementu domene je pridružen točno jedan element kodomene. Funkciju $f$ s domenom $A$, i kodomenom $B$ označavamo s $f : A \to B$. Ako nekom elementu $x$ domene funkcija $f$ pridružuje element $y$ iz kodomene, to još označavamo s $f(x) = y$.

Za daljnja razmatranja trebat ćemo posebnu vrstu funkcija. To su bijekcije. Kako bismo definirali pojam bijekcije, prvo ćemo definirati pojmove injekcije i surjekcije.

Za funkciju $f : A \to B$ kažemo da je *injekcija* ako za sve $x_1, x_2 \in A$, takve da je $x_1 \neq x_2$, vrijedi $f(x_1) \neq f(x_2)$. Navedimo neke primjere. Funkcija $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, zadana sa $f(x) = 2x + 1$, je injekcija. Zatim, funkcija $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, koja je zadana s $f(x) = x^3$, je injekcija. No, funkcije $h_1, h_2 : \mathbb{R} \to [0, +\infty\rangle$ zadane s $h_1(x) = x^2$ i $h_2(x) = x^4$ nisu injekcije (zašto?). Niti jedna konstantna funkcija čija domena ima barem dva elementa, nije injekcija.

Za funkciju $f : A \to B$ kažemo da je *surjekcija* ako za svaki $y \in B$ postoji $x \in A$ tako da je $y = f(x)$. Navedimo par primjera. Funkcija $f : \langle -\pi/2, \pi/2\rangle \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = \operatorname{tg} x$ je surjekcija. Zatim, funkcija $\log : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ je surjekcija. Jedan primjer funkcije koja nije surjekcija je, primjerice, funkcija $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Funkcija koja je injekcija i surjekcija naziva se *bijekcija*. Primjerice, za svaki neprazni skup $A$ funkcija $id : A \to A$ definirana s $id(x) = x$ je bijekcija (funkcija $id$ se naziva identiteta). Zatim, svaka linearna funkcija čija je domena i kodomena skup $\mathbb{R}$ je bijekcija. Bijekcije su jedine funkcije za koje postoje inverzne funkcije (vidi zadatak 5).

### Zadatci s funkcijama

**1.** Neka je $f : A \to B$ neka funkcija, te neka je $C \subseteq A$. Sliku podskupa $C$, u oznaci $f[C]$ definiramo ovako: $f[C] = \{f(x) : x \in C\}$. Dokažite da za svaku funkciju $f : A \to B$ i sve $C_1, C_2 \subseteq A$ vrijedi:

$$f[C_1 \cup C_2] = f[C_1] \cup f[C_2] \quad \text{i} \quad f[C_1 \cap C_2] \subseteq f[C_1] \cap f[C_2].$$

Odredite primjer funkcije $f : A \to B$ i primjere podskupova $C_1, C_2 \subseteq A$ tako da vrijedi: $f[C_1 \cap C_2] \neq f[C_1] \cap f[C_2]$.

[3] Strogu definiciju pojma funkcije možete vidjeti u [8].

**2.** Neka je $f : A \to B$ neka funkcija, te $D \subseteq B$. Prasliku podskupa $D$, u oznaci $f^{-1}[D]$ definiramo ovako: $f^{-1}[D] = \{x : x \in A \text{ i } f(x) \in D\}$. Dokažite da za svaku funkciju $f : A \to B$ i sve $D_1, D_2 \subseteq B$ vrijedi:

$$f^{-1}[D_1 \cup D_2] = f^{-1}[D_1] \cup f^{-1}[D_2] \quad \text{i} \quad f^{-1}[D_1 \cap D_2] = f^{-1}[D_1] \cap f^{-1}[D_2].$$

**3.** Dokažite da je kompozicija funkcija asocijativna operacija.

**4.** Definirajte pojam inverzne funkcije. Dokažite da je inverzna funkcija jedinstvena ako postoji.

**5.** Dokažite da je funkcija $f$ bijekcija ako i samo ako za funkciju $f$ postoji inverzna funkcija.

**6.** Neka su $f$ i $g$ bijekcije takve da je definirana kompozicija $f \circ g$. Dokažite da tada vrijedi $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

**7.** Funkcija $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ nije injekcija, pa nije ni bijekcija. Iz toga posebno slijedi da ne postoji inverzna funkcija funkcije sin. Često se može pročitati da je funkcija arcsin inverzna funkcija funkcije sinus. Objasnite o čemu se tu zapravo radi. Isto pitanje se postavlja i za funkciju arccos.

**8.** Neka su $f$ i $g$ funkcije takve da je njihova kompozicija $f \circ g$ bijekcija. Dokažite da je tada funkcija $f$ surjekcija, a funkcija $g$ je injekcija.

## Prebrojivi skupovi

Jasno je što znači da dva konačna skupa imaju jednak broj elemenata. No, ako imamo dva beskonačna skupa što onda znači da oni imaju jednak broj elemenata?

Krajem 19. stoljeća njemački matematičar Georg Cantor definirao je da dva skupa $A$ i $B$ imaju jednaki broj elemenata ako postoji barem jedna bijekcija $f : A \to B$. Ako skupovi $A$ i $B$ imaju jednak broj elemenata, reći ćemo još da su *ekvipotentni*, te ćemo to označavati s $A \sim B$.

Osnovni primjer beskonačnog skupa je skup svih prirodnih brojeva $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Kažemo da je skup $A$ *prebrojiv* ako je ekvipotentan sa skupom $\mathbb{N}$, tj. postoji barem jedna bijekcija sa skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ u skup $A$. Funkcija $id : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je očigledno bijekcija. Stoga je skup $\mathbb{N}$ prebrojiv.

Tako je, primjerice, i skup svih parnih prirodnih brojeva prebrojiv. Funkcija koja svakom prirodnom broju $n$ pridružuje parni prirodni broj $2n$ očito je bijekcija. Već nas i ovaj elementaran rezultat upozorava da nas kod beskonačnih skupova čekaju iznenađenja: skup svih parnih brojeva je pravi podskup skupa $\mathbb{N}$, a ima jednak broj elemenata kao i $\mathbb{N}$.

Skup svih cijelih brojeva $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ je također prebrojiv. Neparnim prirodnim brojevima možemo redom pridružiti pozitivne cijele brojeve (i nulu), dok parnim prirodnim brojevima možemo redom pridružiti negativne cijele brojeve. Ovu funkciju možemo zapisati pomoću dvije jednostavne aritmetičke formule:

jednu za parne i jednu za neparne brojeve, ovako:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2}, & \text{ako je } n \text{ neparan broj} \\ -\dfrac{n}{2}, & \text{ako je } n \text{ paran broj.} \end{cases}$$

I ovo je interesantan rezultat: skup $\mathbb{Z}$ svih cijelih brojeva pravi je nadskup skupa $\mathbb{N}$, ali nema više elemenata od skupa $\mathbb{N}$, tj. i skup $\mathbb{Z}$ je prebrojiv.

Ali ima i još većih iznenađenja. Skup svih racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je prebrojiv. Ovaj skup brojeva ima bitno različito obilježje od skupova prirodnih i cijelih brojeva. Racionalni su brojevi gusto raspoređeni na brojevnom pravcu: između bilo koja dva zadana racionalna broja postoji treći, različit od zadanih. Primijenimo li ovo svojstvo iterativno, korak po korak, dolazimo do rezultata da između svaka dva racionalna broja postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Koliko "beskonačno mnogo"? Nije teško pokazati (ali se treba dosjetiti!) da postoji bijekcija sa skupa $\mathbb{N}$ na skup $\mathbb{Q}$.

Za naš prvi dokaz neprebrojivosti skupa svih transcendentnih realnih brojeva nužno je dokazati nekoliko činjenica o prebrojivim skupovima.

Sa $\mathbb{Z}^2$ označavamo Kartezijev produkt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Odnosno, skup $\mathbb{Z}^2$ je jednak skupu svih uređenih parova: $\mathbb{Z}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{Z}\}$. Dokažimo da je skup $\mathbb{Z}^2$ prebrojiv. U tu svrhu za svaki $k \in \mathbb{Z}$ definiramo skup $A_k = \{(k,i) : i \in \mathbb{Z}\}$. Očito je za svaki $k \in \mathbb{Z}$ skup $A_k$ prebrojiv, te vrijedi $\mathbb{Z}^2 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo skup $B_n$ ovako:

$$B_n = \{2^{n-1}(2i-1) : i \in \mathbb{N}\}.$$

Primjerice, tada imamo $B_1 = \{1,3,5,\ldots\}$, $B_2 = \{2,6,10,\ldots\}$ i $B_3 = \{4,12,20,\ldots\}$. Očito je svaki skup $B_n$ prebrojiv. Zatim vrijedi $B_i \cap B_j = \emptyset$ za sve $i \neq j$, te $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \mathbb{N}$. (Kažemo još da je $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ jedna *particija* skupa $\mathbb{N}$ na prebrojivo mnogo prebrojivih podskupova.)

Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ neka bijekcija (takva bijekcija postoji jer je skup $\mathbb{Z}$ prebrojiv). Pošto su za svaki $n \in \mathbb{N}$ skupovi $B_n$ i $A_{f(n)}$ prebrojivi, tada postoji barem jedna bijekcija $g_n : B_n \to A_{f(n)}$. (Za izbor skupa bijekcija $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ treba koristiti aksiom izbora. Ovdje to nećemo detaljno raspisati. O aksiomu izbora možete čitati u [8].)

Označimo s $F : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^2$ funkciju koja je definirana ovako: $F(k) = g_n(k)$, gdje je $k \in B_n$. Lako je vidjeti da je funkcija $F$ bijekcija. Time smo dokazali da je skup $\mathbb{Z}^2$ prebrojiv.

Budući da je $\mathbb{Z}^2 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k$, možemo reći da je $\mathbb{Z}^2$ prebrojiva unija prebrojivih skupova. Upravo smo dokazali da je ta prebrojiva unija prebrojivih skupova također prebrojiv skup. Sasvim analogno moglo bi se dokazati da je proizvoljna prebrojiva unija prebrojivih skupova također prebrojiv skup (vidi zadatak 9).

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je $\mathbb{Z}^n = \{(x_1,\ldots,x_n) : x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{Z}\}$. Dokažimo sada matematičkom indukcijom da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ skup $\mathbb{Z}^n$ prebrojiv. Za $n = 1$ tvrdnja glasi da je skup $\mathbb{Z}$ prebrojiv. No, to smo već prije komentirali. Pretpostavimo da je za neki $n \in \mathbb{N}$ skup $\mathbb{Z}^n$ prebrojiv. Tada imamo:

$$\mathbb{Z}^{n+1} = \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z} \sim \text{(pretpostavka indukcije)} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2 \sim \mathbb{Z}.$$

Time je provjereno da vrijedi i tvrdnja iz koraka indukcije. Iz aksioma matematičke indukcije slijedi da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ skup $\mathbb{Z}^n$ prebrojiv.

Vrlo lijep popularni pristup pojmu prebrojivosti je dan u priči o Hilbertovom hotelu. O tome možete čitati u [1] i [6]. Posebno toplo preporučamo Vilenkinovu knjigu [7].

### Zadatci s prebrojivim skupovima

**1.** Dokažite da je skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ prebrojiv.

**2.** Dokažite da je za svaki $k \in \mathbb{Z}$ skup $A_k = \{(k, i) : i \in \mathbb{Z}\}$ prebrojiv.

**3.** Dokažite da je funkcija $F : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ iz dokaza prebrojivosti skupa $\mathbb{Z}^2$ jedna bijekcija.

**4.** Neka je $B_1, B_2, \dots$ beskonačni niz konačnih skupova koji su u parovima disjunktni. Dokažite da je skup $\cup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ konačan ili prebrojiv.

**5.** Neka je $C_1, C_2, \dots$ beskonačni niz konačnih skupova (nisu nužno u parovima disjunktni). Dokažite da je skup $\cup_{k \in \mathbb{N}} C_k$ konačan ili prebrojiv.

**6.** Neka je $A$ konačan i $B$ prebrojiv skup. Dokažite da je tada skup $A \cup B$ prebrojiv.

**7.** Neka je $k \in \mathbb{N}$ i $A_1, A_2, \dots, A_k$ prebrojivi skupovi koji su u parovima disjunktni. Dokažite da je skup $A_1 \cup \dots \cup A_k$ prebrojiv.

**8.** Neka je $A_1, A_2, \dots$ beskonačni niz prebrojivih skupova koji su u parovima disjunktni. Dokažite da je skup $\cup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ prebrojiv.

**9.** Neka je $D_1, D_2, \dots$ beskonačni niz prebrojivih skupova (nisu nužno u parovima disjunktni). Dokažite da je skup $\cup_{k \in \mathbb{N}} D_k$ prebrojiv.

**10.** Dokažite da je skup $\mathbb{Q}$ svih racionalnih brojeva prebrojiv.
*Uputa.* Tvrdnja ovog zadatka jednostavno slijedi korištenjem prethodnih zadataka (skup $\mathbb{Q}$ prikažite kao prebrojivu uniju prebrojivih skupova). Jedan dokaz prebrojivosti skupa $\mathbb{Q}$ možete pogledati i u [4].

**11.** Dokažite da su skupovi $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ prebrojivi.

**12.** Dokažite da je skup $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ prebrojiv.

**13.** Dokažite da je svaki beskonačni skup otvorenih intervala realnih brojeva, koji su međusobno disjunktni, prebrojiv.

Sada slijedi popis referenci koje smo koristili. Trudili smo se u popis staviti što više naslove na hrvatskom jeziku nadajući se da ćete ih lakše pronaći u nekoj od vama bližih knjižnica. Zatim, pokušali smo uputiti na što više članaka iz MFL-a koji su vezani uz našu temu.

## Literatura

[1] N. Casey, *Hotel Infinity*, Poučak, 22 (2005), 72–80.

[2] J. Gaspar, *Direct Proof of the Uncountability of the Transcendental Numbers*, American Mathematical Monthly 121 (2014), p. 80.

[3] D. Marques, *Yet Another Direct Proof of the Uncountability of the Transcendental Numbers*, American Mathematical Monthly 121 (2014), p. 631.

[4] I. Mihalj, *Prebrojivost skupa racionalnih brojeva i konstrukcija zmijaste funkcije*, MFL 215 (2004), 185–190.

[5] I. Smud, *O ekvipotentnosti (jednakobrojnosti) skupova*, MFL 222 (2005), br. 2, 74–75.

[6] D. Veljan, *Hotel s beskonačno mnogo soba*, Matka 6 (1997./98.), 69–72.

[7] N. J. Vilenkin, *Priče o skupovima*, Školska knjiga, Zagreb, 1975.

[8] M. Vuković, *Teorija skupova*, predavanja, PMF – Matematički odsjek, Zagreb, 2015.
`https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/ts-skripta-2015.pdf`